

تمرين 2-

لتكن X مجموعة غير منتهية ولتكن \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} = \{ \emptyset, X, \text{و } \dots \}$$

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{منتهية } A \\ 1 & \text{غير منتهية } A \end{cases}$$

(1) اثبت ان μ^* قياس خارجي على 2^X لكنه ليس قياساً

(2) اوجد صفائح لمجموعة \mathcal{A} مع μ^* (اي اوجد μ)
الكل μ^* مبرهنة

1 (ق 2) $\mu^*(\emptyset) = 0$ يحقق لان مجموعة \emptyset منتهية
وفي (\emptyset) عنصر

ثبات $\mu^*(A) \geq 0$ يحققه بسهولة

(ق 2) لتكن $A \subset B$ عندها $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

$$0 \leq 0$$

$$1 \leq 1$$

اذا كانت B منتهية فانه A منتهية فها اي اننا

$$\mu^*(A) = 0 \leq 0 = \mu^*(B)$$

اذا كانت B غير منتهية \leftarrow اما ان تكون A منتهية ، لهنا عين

$$\mu^*(A) = 0 \leq 1 = \mu^*(B)$$

\leftarrow او تكون A غير منتهية ، لهنا عين :

$$\mu^*(A) = 1 \leq 1 = \mu^*(B)$$

(ق 3) : لتكن

$A_n \in 2^X$ ، A_n وليست ان

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \quad (1)$$

اذا كانت كل مجموعة A_n منتهية فانه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = 0 \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

ببساطة $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$ ونعلم ان $0 \neq 1$

في حالة العلاقة (1) غير صحيحة

$\leftarrow \mu^*$ ليس مقياساً خارجياً

ملاحظة:

إذا كانت S نصف حلقة على X فتكون كلغة طول S هي

$$R(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n A_i : n \in \mathbb{N} ; A_i \in S \right\}$$

فإذا كان

$$\mu : S \rightarrow [-\infty, +\infty]$$

فيمكن تعريفه الى $R(S)$ حيث انه $S \subset R(S)$

$$\tilde{\mu} : R(S) \rightarrow [-\infty, +\infty]$$

$$\sum_{i=1}^n A_i \rightarrow \tilde{\mu} \left(\sum_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

(معرفة كلغة)

(معرفة نصف الحلقة)

$R(S)$

(معرفة S)

$$\mu : S \rightarrow [-\infty, +\infty]$$

$$\tilde{\mu} : R(S) \rightarrow [-\infty, +\infty]$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \rightarrow \sum \mu(A_i) = \tilde{\mu} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)$$

الخاصة 8